数理解析研究所講究録
第2055巻 2017年 96-98

ON SPECIAL BESSEL PERIODS FOR SO $(2n+1)$

大阪市立大学大学院理学研究科：古澤 昌秋
（神戸大学大学院理学研究科：森本 和輝との共同研究 ）

ABSTRACT. 奇数次元の特殊直交群上の special Bessel period と保型 L 函数の中心特殊値の関係に関して得られた最近の結果について講演した．また，その応用として，次数 2 のジーゲル尖点形式のスピノル L 函数の中心特殊値に関する Böcherer 予想についての進展もあったので，それについても述べた．

記法. F を代数体とし，$\mathbb{A}$ を F の adele 環とする．E を F の 2 次拡大とし，χ_E を E に対応する $\mathbb{A}^\times/F^\times$ の 2 次指標とする．L 函数は，local L 因子のすべての素点に渡る積として得られる complete L 函数を表す．n を 2 以上の整数とし，2 次形式空間 $(V,(\ ,\ ))$ は，$\dim V = 2n+1$ で，$V = \mathbb{H}^{n-1} \oplus L$ （直交和），ただし，$\mathbb{H}$ は hyperbolic plane，$\dim L = 3$，L は 2 次形式空間として $\left(E, \mathrm{N}_{E/F}\right)$ を含む，という形に表されるものとする．このとき，このような SO (V) たちの代数群としての F 同型類たちの全体を $\mathcal{G}_n$ で表す．また，記法の濫用で，SO (V) とそれの属する F 同型類を同一視する．特に，$\mathbb{G} = \mathbb{G}_n = \mathrm{SO}\,(\mathbb{V}_n)$ で split なものを表すことにする．

Gross-Prasad 予想. [Gross-Prasad [8, 9]] $G = \mathrm{SO}\,(V) \in \mathcal{G}_n$ とする．このとき，自然に $D_E := \mathrm{SO}\,(E) \subset G$ であるが，適当な unipotent subgroup $S \subset G$ をとることによって，Bessel subgroup $R_E := D_E \ltimes S$ を定める．R_E は，G の maximal parabolic subgroup で Levi component が $\mathrm{GL}_{n-1} \times \mathrm{SO}\,(L)$ になるものの部分群となっている．$\mathbb{A}/F$ の非自明な指標 ψ をひとつとり，固定する．このとき，ψ に対して，$S\,(F)\backslash S\,(\mathbb{A})$ の指標で，$D_E\,(\mathbb{A})$ の共役による作用で不変なものを定義することができる．記法の濫用によって，この $S\,(\mathbb{A})$ の指標も ψ で表すことにする．

τ を $D_E\,(\mathbb{A})\,/D_E\,(F)$ の指標とするとき，$G\,(\mathbb{A})$ の保型形式 f に対して，f の (E,τ,ψ) 型 Bessel period, $B_{E,\tau,\psi}\,(f)$ が，

$$B_{E,\tau,\psi}\,(f) := \int_{D_E(F)\backslash D_E(\mathbb{A})} \int_{S(F)\backslash S(\mathbb{A})} f\,(ts)\ \tau\,(t)^{-1}\ \psi\,(s)^{-1}\ dt\,ds$$

によって定義される．

特に τ が自明のとき，$(E,1,\psi)$ 型 Bessel period を E 型 special Bessel period とよび，$B_E\,(f)$ で表す．すなわち，

$$B_E\,(f) = \int_{D_E(F)\backslash D_E(\mathbb{A})} \int_{S(F)\backslash S(\mathbb{A})} f\,(ts)\ \psi\,(s)^{-1}\ dt\,ds$$

である．

主定理 ([4] の Theorem 1)**.** $G \in \mathcal{G}_n$ とし，$\pi = \otimes_v \pi_v$ を $G\,(\mathbb{A})$ の既約 *cuspidal* 保型表現，V_π をその保型形式の空間とする．ある有限素点 w について，π_w は *generic*，すなわち，*Whittaker model* を持つとする．

Date: 2017 年 2 月 8 日 RIMS 研究集会「保型形式とその周辺」．本研究集会における講演の機会を与えてくださった研究代表の長岡昇勇さんと副代表の水野義紀さんに感謝します．

この研究は，以下の科学研究費補助金によって援助されています．古澤：基盤研究 (C)25400020, (C)16K05069, 森本：特別研究員奨励費 (26-1158), 若手研究 (B)26800021.

このとき，B_E が V_π 上において恒等的に *zero* でないならば，

$$L\left(\frac{1}{2},\pi\right) L\left(\frac{1}{2},\pi\times\chi_E\right)\neq 0$$

が成り立つ．さらに，π° という $\mathbb{G}_n(\mathbb{A})$ の既約 *cuspidal* 保型表現で，*globally generic*，すなわち，*Whittaker Fourier* 係数が非消滅で，$\pi_v^\circ\simeq\pi_v$ がほとんど全ての素点 v に対して成り立つものが存在する．

証明は，[3] における G と $\widetilde{\mathrm{Sp}}_n$ の間のテータ対応に関する Whittaker Fourier 係数の引き戻しを，より精密に考察することによって得られる．Gan-武田 [7] によって local テータ対応と global テータ対応が自由に行き来出来ること，及び，山名 [17] によって doubling method が完成させられたこと，が基本的に大きな役割を果たす．

詳細については，論文 [4] を参照されたい．

精密化された Gross-Prasad 予想． 市野-池田論文 [12] は，その発表以来，保型 L 函数の特殊値明示公式の研究の方向性に大きな影響を与え続けている．Liu [16] は，市野-池田 [12] による余次元 1 の場合の Gross-Prasad 予想の精密化を，一般の Bessel period に対して定式化した．

講演の後半では，Liu によって定式化された Gross-Prasad 予想の精密化について，special Bessel model の場合に [5] において得られた結果について述べた．

主定理 ([5])**．** F は総実代数体とする．$G\in\mathcal{G}_n$ とし，$\pi=\otimes_v\pi_v$ は既約 *cuspidal* 保型表現で，*tempered* であるとする．さらに，π_v はすべての無限素点において離散系列表現であるとする．

このとき，B_E が V_π 上において恒等的に *zero* でないならば，精密化された *Gross-Prasad* 予想が成り立つ．すなわち，中心特殊値

$$L\left(\frac{1}{2},\pi\right) L\left(\frac{1}{2},\pi\times\chi_E\right)$$

について，市野-池田タイプの明示公式が成り立つ．

証明は，Lapid-Mao による極めて深い論文 [13, 14, 15] によって得られた $\widetilde{\mathrm{Sp}}_n$ の Whittaker Fourier 係数に関する市野-池田タイプの明示公式を，[3] により G に引き戻し，そこに Gan-武田 [6] による Rallis inner product formula を絡めることによって得られる．

Dickson-Pitale-Saha-Schmidt [2] は，Liu による精密化された Gross-Prasad 予想の成立を仮定すると，次数 2 のスカラー値ジーゲル尖点形式で Hecke 固有形式であり齋藤-黒川リフ ティングでないものについて，明示的に精密化された Böcherer 予想 [1]，すなわち，スピノル L 函数とそれの虚 2 次体に関する 2 次指標による twist の積として得られる L 函数の中心特殊値に関する明示公式が成立することを示した．

講演では，その明示公式のベクトル値の場合への拡張について述べた．無限素点上の局所的 Bessel period の明示的な計算を，Hsieh-並川 [10, 11] による吉田リフティングに関する Bessel period と Rallis inner product formula についての結果を用いて行うことによって，拡張することができる．

なお，講演の中で与えたベクトル値保型形式に対するスカラー値 Bessel period の定義には誤りがあったことを，ここにお知らせすると共にお詫びする．[5] の改訂版には，修正した定義による明示的 Böcherer 予想のベクトル値保型形式への拡張が含まれる予定である．明示公式の正確性が確認出来次第，arXiv にアップロードするつもりである．詳細については，そちらを参照されたい．

References

[1] Böcherer, S.: *Bemerkungen über die Dirichletreihen von Koecher und Maaß.* Mathematica Gottingensis, Göttingen, vol. **68**, p. 36 (1986)

[2] Dickson, M., Pitale, A., Saha, A., Schmidt, R.: *Explicit refinements of Böcherer's conjecture for Siegel modular forms of squarefree level.* arXiv:1512.07204v3 (preprint)

[3] Furusawa, M.: *On the theta lift from* SO_{2n+1} *to* $\widetilde{\mathrm{Sp}}_n$. J. Reine Angew. Math. **466**, 87–110 (1995)

[4] Furusawa, M., Morimoto. K.: *On special Bessel periods and the Gross-Prasad conjecture for* $\mathrm{SO}(2n+1)\times\mathrm{SO}(2)$. Math. Ann. **368**, 561–586 (2017)

[5] Furusawa, M., Morimoto, K.: *Refined global Gross-Prasad conjecture on special Bessel periods and Böcherer's conjecture.* arXiv:1611.05567 (preprint)

[6] Gan, W. T., Takeda, S.: *On the regularized Siegel-Weil formula (the second term identity) and non-vanishing of theta lifts from orthogonal groups.* J. Reine Angew. Math. **659**, 175–244 (2011)

[7] Gan, W. T., Takeda, S.: *A proof of the Howe duality conjecture.* J. Amer. Math. Soc. **29**, 473–493 (2016)

[8] Gross, B. H., Prasad, D.: *On the decomposition of a representation of* SO_n *when restricted to* SO_{n-1}. Canad. J. Math. **44**, 974–1002 (1992)

[9] Gross, B. H., Prasad, D.: *On irreducible representations of* $\mathrm{SO}_{2n+1}\times\mathrm{SO}_{2m}$. Canad. J. Math. **46**, 930–950 (1994)

[10] Hsieh, M.-L., Namikawa, K.: *Bessel periods and the non-vanishing of Yoshida lifts modulo a prime.* Math. Z. **285**, 851–878 (2017)

[11] Hsieh, M.-L., Namikawa, K.: *Inner product formula for Yoshida lifts.* arXiv:1609.07669 (preprint)

[12] Ichino, A., Ikeda, T.: *On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross-Prasad conjecture.* Geom. Funct. Anal. **19**, 1378–1425 (2010)

[13] Lapid, E., Mao, Z.: *A conjecture on Whittaker-Fourier coefficients of cusp forms.* J. Number Theory **146**, 448–505 (2015)

[14] Lapid, E., Mao, Z.: *Whittaker-Fourier coefficients of cusp forms on* $\widetilde{\mathrm{Sp}}_n$*: reduction to a local statement.* Amer. J. Math. **139**, 1–55 (2017)

[15] Lapid, E., Mao, Z.: *On an analogue of the Ichino-Ikeda conjecture for Whittaker coefficients on the metaplectic group.* Algebra Number Theory **11**, 713–765 (2017)

[16] Liu, Y.: *Refined global Gan-Gross-Prasad conjecture for Bessel periods.* J. Reine Angew. Math. **717**, 133–194 (2016)

[17] Yamana, S.: *L-functions and theta correspondence for classical groups.* Invent. Math. **196**, 651–732 (2014)